由于作者去学 Linear Algebra Done Right 了，所以暂停更新（

本文的目的是让你理解第一节课涉及的全 26 页 ppt 里的所有文字，把课程 ppt 下载下来跟着读就行了，相当于一个文字导游。

基于本人的兴趣，这篇导游笔记可能会长一些。

前 10 页就不说了，把我骗进来杀，非常基础。

page 13 ~ 15 直接看 MIT 18.06（就是 b 站最火的那个线性代数课）就行了。

后面酉空间和矩阵变换之类的东西就不适合一页一页讲了，而是成体系地讲。

目录

page 11 1
闵可夫斯基空间 1
引入：伽利略变换 1
时空距离与世界线 2
洛伦兹变换、Minkovski 度规 2
顶点自由度 3
SIGGRAPH 水体模拟 3
page 12 3
灵感菇 3
page 16：矩阵多项式的特征值就是矩阵特征值的多项式 3
证明 3
酉空间 3
引入：实内积空间 3
共轭矩阵 3

---

page 11

这一张 ppt 本身比较简单，但是举了一些例子。

闵可夫斯基空间

来点物理。

引入：伽利略变换

真遗憾，我是大专生，没学过相对论。

所以之前都是秉承绝对时空观下的四维时空观念来理解时空的，但仔细一想这种混合坐标 (x, y, z, t) 是无法做伽利略变换的，现在补充一下真正的伽利略变换。

假设两个惯性参考系为 $S(x, y, z)$ 和 $S'(x', y', z')$，假设在 S 中 S' 以初始位置 (x_0, y_0, z_0) 和速度 $v = (v_x, v_y, v_z)$ 运动，那么 S' 在 S 中的坐标为 $\vec{S'} = \left(x_0 + v_x t, y_0 + v_y t, z_0 + v_z t\right)$

现在有一个物体，或者说事件，在 S 中的坐标为 $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$，在 S' 中的坐标为 $\boldsymbol{x}' = (x', y', z')$，从绝对时间观 $t = t'$ 出发，可以推导出物体在两个参考系中的坐标关系：

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \vec{S'}$$

也就是：

$$x' = x - x_0 - v_x t$$
$$y' = y - y_0 - v_y t$$
$$z' = z - z_0 - v_z t$$

这个关系式两边对 t 求两次导可以得出参考系变换加速度不变的结论。

但只求一次导，会得到：$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - v$（速度叠加原理），这个并不兼容 Michelson-Morley 实验中光速不变的观测结果。

其实也有电磁学上的悖论，但我不懂就不说了。

时空距离与世界线

闵可夫斯基空间定义一个坐标的形式为 $\mathbf{x} = (x, y, z, ct)$，其中 t 是时间坐标，c 是光速，ct 的单位正好是米，与 x, y, z 一致。

考虑一个光子在闵可夫斯基空间中的轨迹，按照 $t_1 < t_2$ 取两个采样点 $\mathbf{x_1} = (x_1, y_1, z_1, ct_1)$ 和 $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2, ct_2)$，容易看出有以下等式恒成立：

$$c(t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这式子本质是在表达速度，把 $c(t_2 - t_1)$ 移到式子右边，就可以定义 **时空距离** 的概念：

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

我们在闵氏空间里随便采样两个点 $\mathbf{x_1}$ 和 $\mathbf{x}_2$，每个采样点都是带有空间和时间坐标的**事件**，有以下三种情况：

1. $ds^2 = 0$，也就是 $c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$，两次采样点落在了光速运动的粒子或波上。（类光世界线）
2. $ds^2 > 0$，也就是 $c^2 dt^2 < dx^2 + dy^2 + dz^2$，两次采样点之间的因果关系是不可达的。（若想有因果关系则必须超越光速，也就是类空世界线）
3. $ds^2 < 0$，也就是 $c^2 dt^2 > dx^2 + dy^2 + dz^2$，两次采样点之间可以有因果关系。（类时世界线）

洛伦兹变换、Minkovski 度规

闵氏空间里也可以做伽利略变换，但变换前后还是会改变光速。所以，在光速不变的前提下如何做参考系变换？

考虑把约束条件扩充为参考系变换前后 **时空距离不变**（这其实是出于物理上观测结果的自然假设），也就是 ds^2 不变，这样的好处是可以转到数学的角度来思考，因为时空距离可以写成一种内积。

定义**内积** $< \vec{u}, \vec{v} >$ 为 $\vec{u}^T \eta \vec{v}$，其中 η 是个方阵。

众所周知，点积是内积的一种特殊形式，只要令 $\eta = I$（单位矩阵），内积就表现为点积。

时空距离按照矩阵的形式写成内积表达就是：$ds^2 = \Delta\mathbf{x}^T \eta \Delta\mathbf{x}$

其中 $\Delta\mathbf{x} = \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$，$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，或者简化一下 $\eta = diag(-1, 1, 1, 1)$

所以我们实质上是在要求我们的参考系变换保持变换前后的某种内积不变（这里的内积是在 $\eta = diag(-1,1,1,1)$ 下的内积，也就是时空距离），这种变换其实就是正交变换

正交变换 $\Lambda = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的定义是：$<\vec{u},\vec{v}>=<\Lambda\vec{u},\Lambda\vec{v}>$，也就是变换前后内积不变，可以用矩阵的形式写成 $\vec{u}^T\eta\vec{v} = (\Lambda\vec{u})^T\eta(\Lambda\vec{v})$，化简一下就是 $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$，**这个很重要**。

（话说这个也帮我勘误了一下之前学 games101 的时候，由于是问的 LLM，把正交变换当成保距变换了，惭愧）

现在我们的任务就是在 $\eta = diag(-1,1,1,1)$ 的前提下找出满足 $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$ 的 Λ 变换矩阵，实际上答案是**洛伦兹变换**。（我太菜，不推了，能帮读者理清逻辑链就很满足了）

顶点自由度

D 指导：在《原神》这类 3D 游戏中，顶点自由度数为 45459 这一表述需要结合角色建模、动画绑定和渲染技术来理解。这里的“顶点自由度”并非传统图形学中的简单坐标自由度，而是指角色模型在动画和交互中可动态变化的顶点属性数量。

SIGGRAPH 水体模拟

似乎不是具体的算法。

---

page 12

灵感菇

线性映射，其实就是线性变换的超集。

线性变换专指同一空间下的线性映射。

---

page 16：矩阵多项式的特征值就是矩阵特征值的多项式

证明

酉空间

引入：实内积空间

共轭矩阵
